Chapitre 35

Probabilités 2 – Indépendance, conditionnement

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini (i.e. Ω désigne un univers fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur Ω).
E, F sont des ensembles quelconques.

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition

Définition 35.1

Soit A, B deux événements de Ω tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité (conditionnelle) de A sachant B le réel noté :

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On note également $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$

$\mathbb{P}(A \mid B)$ représente la probabilité que A se produise sachant déjà que B s'est produit. On prendra garde au fait que la notation est trompeuse : bien qu'on écrive $\mathbb{P}(A \mid B)$, "$A \mid B$" n'est pas un événement.

Remarque. Comme $A \cap B \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ si bien que $\mathbb{P}(A \mid B) \leq 1$: c'est cohérent avec ce qu'on attend d'une probabilité.

Exemple 1. On tire une pièce deux fois, on note :

- A l'événement "deux faces ont été obtenues"
- A' l'événement "deux piles ont été obtenus".
- B l'événement "au moins un pile a été obtenu".

Calculer $\mathbb{P}(A \mid B)$ et $\mathbb{P}(A' \mid B)$.

Propriété 35.2

Soit B un événement de Ω tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B = \mathbb{P}(\cdot \mid B) : \ \mathcal{P}(\Omega) &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω.

Attention à ne pas confondre $\mathbb{P}_B$ définie ci-dessus avec $\mathbb{P}_X$ (la loi d'une v.a. X). $\mathbb{P}_B$ étant une probabilité, elle hérite ainsi des propriétés vérifiées par toute probabilité :

1. $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \mid B) = 1$ et $\mathbb{P}(\varnothing \mid B) = 0$
2. Si A, A' sont des événements disjoints, on a
$$\mathbb{P}(A \cup A' \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A' \mid B)$$
3. $$\mathbb{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$$
4. Si $A \subset A' \subset \Omega$, alors
$$\mathbb{P}(A \mid B) \leq \mathbb{P}(A' \mid B)$$
5. Pour tous événements A, A',
$$\mathbb{P}(A \cup A' \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A' \mid B) - \mathbb{P}(A \cap A' \mid B)$$

1.2 Formule des probabilités composées

Propriété 35.3

Pour tous événements A, B,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$$
avec la convention $\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = 0 \quad$ si $\mathbb{P}(B) = 0$.

Si $\mathbb{P}(B) = 0$, le réel $\mathbb{P}(A \mid B)$ n'a pas de sens en soi. Cependant, avec la convention donnée, la formule est valide car elle se réduit à $0 = 0$: en effet si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ car $A \cap B \subset B$.

Propriété 35.4 (Formule des probabilités composées)

Soit $A_1, \cdots, A_n$ des événements. Alors
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Cette formule est particulièrement utilisée lorsque $A_1, \cdots, A_n$ forment une suite d'événements “chronologiques” qui ne sont pas indépendants.

Exemple 2. On dispose d'une urne avec 3 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement 3 boules, sans remise. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on note A_i l'événement “le tirage numéro i donne une boule rouge”. Quelle est la probabilité de tirer les 3 boules rouges ?

Exemple 3. On suppose maintenant qu'on tire 3 boules de l'urne en une fois, simultanément. Quelle est la probabilité de tirer les 3 boules rouges ?

1.3 Formule des probabilités totales

Propriété 35.5

Soit $(B_1, \cdots, B_n)$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

avec la convention $\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i) = 0 \quad \text{si } \mathbb{P}(B_i) = 0.$

Démonstration.

□

Exemple 4. Cette formule sert souvent en conjonction avec la formule de Bayes, cf exemple 5.

1.4 Formule de Bayes

Propriété 35.6 (Formule de Bayes)

Soit A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

avec la convention $\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = 0 \quad \text{si } \mathbb{P}(B) = 0.$

Démonstration.

□

La formule de Bayes est un grand classique : elle permet de "retourner" un conditionnement. Bien souvent, pour trouver $\mathbb{P}(A)$, on utilise la formule des probabilités totales.

Exemple 5. Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test pour détecter cette maladie. On note M l'événement "la personne testée est malade" et T l'événement "le test est positif". On a donc

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

- Si la personne est malade, le test détectera la maladie dans 99% des cas, càd

$$\mathbb{P}(T \mid M) = 99\% = 0,99$$

  (c'est la proportion de vrai positif)
- Si la personne n'est pas malade, le test sera positif dans 0,1% des cas, càd

$$\mathbb{P}(T \mid \overline{M}) = 0,1\% = 0,001$$

Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

1.5 Loi conditionnelle

Rappel : si $X : \Omega \to E$ est une v.a., la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \end{aligned}$$

Définition 35.7

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout événement $B \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ on définit la loi (conditionnelle) de X sachant B comme étant l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in \bullet \mid B) : \quad \mathcal{P}(E) &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A \mid B) = \mathbb{P}_B(X \in A) = \mathbb{P}_B\left(X^{-1}(A)\right) \end{aligned}$$

Autrement dit, cela correspond à la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_B)$.

On prendra garde au fait que dans la définition ci-dessus, on a $B \subset \Omega$ mais $A \subset E$. Contrairement à $\mathbb{P}_X$ ci-dessus, il n'y a pas de notation spécifique pour la loi conditionnelle. Comme toutes les lois, elle est entièrement déterminée par sa valeur sur les singletons $\{x\}$ avec $x \in E$, càd par la distribution de probabilités

$$(\mathbb{P}(X = x \mid B))_{x \in E}$$

Exemple 6. On lance un dé à six faces. On pose X la v.a. égale au numéro obtenu, et B l'événement $\{X \text{ est pair}\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant B.

Propriété 35.8

Soit X, Y des v.a. sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et F respectivement. Alors pour tout $x \in E$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in F} \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y)$$

avec la convention $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = 0 \quad$ si $\mathbb{P}(Y = y) = 0$.

2 Indépendance d'événements

2.1 Indépendance de deux événements

Définition 35.9 (Indépendance)

Deux événements A, B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Cela signifie concrètement que le fait que l'événement A soit réalisé ou non ne dépend pas du fait que B soit réalisé ou non.

Exemple 7. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Montrer que les événements suivants sont indépendants :

$$A = \{\text{la carte est un as}\}$$

$$B = \{\text{la carte est un trèfle}\}$$

La probabilité étant uniforme, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

On a bien $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$: les deux événements sont indépendants.

Remarque. Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. En général ce sont même des notions opposées. Si on suppose $A \cap B = \varnothing$ avec $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \qquad \text{mais} \qquad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$$

donc les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est assez naturel : si A, B sont incompatibles, cela signifie que si l'un se produit, l'autre ne peut pas se produire. Il y a donc bien une dépendance entre ces événements.

La Proposition suivante fournit un éclairage saisissant :

Propriété 35.10

Soit A, B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors A, B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration.

□

Cette Proposition (ainsi que la suivante) montre en particulier que si A, B sont indépendants, le fait que B soit réalisé ou non ne change pas la probabilité que A le soit aussi.

Propriété 35.11

Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

En particulier, si $\mathbb{P}(\overline{B}) > 0$, on a donc $\mathbb{P}(A \mid \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration. Par la formule des probabilités totales, comme $(B, \overline{B})$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. □

2.2 Événements mutuellement indépendants

Définition 35.12

Soit $A_1, \cdots, A_n$ des événements de Ω.

- $A_1, \cdots, A_n$ sont dits <u>indépendants 2 à 2</u> si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts, les événements A_i, A_j sont indépendants.
- $A_1, \cdots, A_n$ sont dits <u>(mutuellement) indépendants</u> si pour tout sous-ensemble I de $[\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

L'indépendance mutuelle est une condition plus “forte” que l'indépendance deux à deux.

Exemple 8. On lance une pièce deux fois. On pose les événements

$$A = \{\text{le premier lancer est pile}\}$$

$$B = \{\text{le deuxième lancer est pile}\}$$

$$C = \{\text{les deux lancers sont identiques}\}$$

Alors A, B, C sont indépendants deux à deux mais ne sont pas mutuellement indépendants.

3 Variables aléatoires indépendantes

3.1 Définition

Notation. Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. définies sur le même univers Ω. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. On rappelle que $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont des événements, donc des sous-ensembles de Ω. On introduit la notation :

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) := \mathbb{P}\left(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\right)$$

C'est donc la probabilité que X soit dans A et Y soit dans B : la virgule a valeur de “et” [1]. De plus, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on pose également :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x, Y = y) &:= \mathbb{P}\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right)\\ &= \mathbb{P}(X \in \{x\}, Y \in \{y\})\end{aligned}$$

Définition 35.13

Deux v.a. $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont dites <u>indépendantes</u> si pour toutes parties $A \subset E$ et $B \subset F$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

On note alors $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$.

Pour montrer l'indépendance de deux variables, il suffit de montrer que $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants pour tous $x \in E$ et $y \in F$:

Propriété 35.14 (Caractérisation de l'indépendance)

Deux v.a. $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \qquad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Démonstration. Sens direct : on suppose $X \perp\!\!\!\perp Y$. Soit $x \in E$ et $y \in F$. Comme X, Y sont indépendantes, les évènements $\{X \in \{x\}\}$ et $\{Y \in \{y\}\}$ aussi, donc :

$$\mathbb{P}(X \in \{x\}, Y \in \{y\}) = \mathbb{P}(X \in \{x\})\mathbb{P}(Y \in \{y\})$$

ce qui signifie

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Sens réciproque : on suppose que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \qquad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

1. Toutefois, on continuera d'écrire $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ et non $\cancel{\mathbb{P}(A, B, C)}$.

Montrons que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) =& \mathbb{P}\left(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\right) \\
=& \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right) \bigcap \left(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right)\right) \\
=& \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} \left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or, les évènements $\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right)_{x \in A, y \in B}$ sont disjoints deux à deux. Par additivité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \mathbb{P}\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right) \\
&= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \mathbb{P}(X = x) P(Y = y) \\
&= \left(\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)\right) \left(\sum_{y \in B} P(Y = y)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right) \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) \\
&= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 9. On lance deux dés à 6 faces et on note X_1, X_2 les v.a. correspondant aux résultats de chaque lancer. Alors X_1 et X_2 sont indépendantes. En effet, en considérant $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω, on a pour tout $(i, j) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}\left(\{(i, j)\}\right) = \frac{\text{card}\left(\{(i, j)\}\right)}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}\left(\{(i, k) \mid k \in [\![1,6]\!]\}\right) = \frac{1}{6} \qquad \text{et de même } \mathbb{P}(X_2 = j) = \frac{1}{6}$$

On a bien $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = j)$.

Plus généralement, l'énoncé sous-entend souvent des situations où les v.a. sont indépendantes : différents lancers de dés ou de pièces, des tirages *avec remise* de boules dans une urne, etc.

Exemple 10. On reprend l'expérience précédente. On pose

$$U = \min(X_1, X_2) \qquad \text{et} \qquad V = \max(X_1, X_2)$$

alors U, V sont aussi des v.a. mais elles ne sont pas indépendantes. Par exemple

$$\mathbb{P}(U = 6, V = 1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

alors que

$$\mathbb{P}(U = 6) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et de même} \qquad \mathbb{P}(V = 1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si bien que $\mathbb{P}(U = 6, V = 1) \neq \mathbb{P}(U = 6)\mathbb{P}(V = 1)$

Remarque. Dire que deux v.a. sont indépendantes signifient "grosso modo" que les valeurs prises par l'une n'a aucune incidence (en termes de probabilités) sur les valeurs de l'autre. C'est naturel pour X_1 et X_2 de l'exemple ci-dessus, mais ce n'est pas le cas pour U et V : en effet, on doit toujours avoir $U \leq V$: les valeurs prises par U influencent les valeurs possibles pour V et réciproquement.

Propriété 35.15

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. indépendantes. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$$

Propriété 35.16

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. Soit f, g des fonctions définies sur E et F respectivement. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

Exemple 11. En reprenant l'exemple 9, on en déduit par exemple que les v.a. X_1^2 et $\sqrt{X_2}$ sont indépendantes.

3.2 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 35.17

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. à valeurs dans des ensembles $E_1, \cdots, E_n$ respectivement. Les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ sont dites <u>(mutuellement) indépendantes</u> si

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Cette définition équivaut en fait à

$$\forall (A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(E_n) \qquad \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in A_k)$$

Enfin, on peut également définir la notion de v.a. indépendantes deux à deux :

Définition 35.18

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. à valeurs dans des ensembles $E_1, \cdots, E_n$ respectivement. Les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ sont dites <u>indépendantes</u> deux à deux si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, si $i \neq j$ alors les v.a. X_i et X_j sont indépendantes.

Comme pour les événements, l'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

Propriété 35.19

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. à valeurs dans des ensembles $E_1, \cdots, E_n$ respectivement. Soit $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions définies sur $E_1, \cdots, E_n$ respectivement. Si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont (mutuellement) indépendantes, alors les v.a.

$$f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$$

sont également (mutuellement) indépendantes.

Exemple 12. Soit X, Y, Z, T quatre v.a.r. indépendantes. Alors

$$X^2, \quad e^Y, \quad \ln(1+|Z|), \quad \arctan(T)$$

sont des v.a.r. indépendantes

Lemme 35.20 (Lemme des coalitions)

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. à valeurs dans des ensembles $E_1, \cdots, E_n$ respectivement. Soit $p_1, \cdots, p_r \in [\![1, n]\!]$ tels que $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r < n$.

- Soit f_1 une fonction définie sur $E_1 \times \cdots \times E_{p_1}$, de sorte que $f_1(X_1, \cdots, X_{p_1})$ ait un sens.
- Soit f_2 une fonction définie sur $E_{p_1+1} \times \cdots \times E_{p_2}$, de sorte que $f_2(X_{p_1+1}, \cdots, X_{p_2})$ ait un sens.
- ...
- Soit f_{r+1} une fonction définie sur $E_{p_r+1} \times \cdots \times E_n$, de sorte que $f_{r+1}(X_{p_r+1}, \cdots, X_n)$ ait un sens.

Alors les v.a.

$$f_1(X_1, \cdots, X_{p_1}), \qquad f_2(X_{p_1+1}, \cdots, X_{p_2}), \qquad \cdots \qquad f_{r+1}(X_{p_r+1}, \cdots, X_n)$$

sont (mutuellement) indépendantes.

Exemple 13. Soit X, Y, Z, T quatre v.a.r. indépendantes. Alors

$$e^X Y^2 \qquad \text{et} \qquad \arctan(ZT) \qquad \text{sont indépendantes}$$
$$\sqrt{|X|} \qquad \text{et} \qquad \cos(Y^Z)\sin(T) \qquad \text{sont indépendantes}$$

3.3 Somme de n v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$

Théorème 35.21

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. (mutuellement) **indépendantes**. On suppose que $X_1, \cdots, X_n$ suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, ce qu'on peut noter $X_1 \sim \cdots \sim X_n \sim \mathcal{B}(p)$.

Alors la v.a. $Y = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p), i.e. $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Preuve "moche" mais compréhensible. Comme $X_1, \cdots, X_n$ sont à valeurs dans $\{0,1\}$, la v.a. Y est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, calculons $\mathbb{P}(Y = k)$. L'événement $\{Y = k\}$ est réalisé quand exactement k v.a. parmi $X_1, \cdots, X_n$ valent 1.
Supposons que les k variables qui valent 1 soient les k premières, à savoir $X_1, \cdots, X_k$. Alors par indépendance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1, \cdots, X_k = 1,\ X_{k+1} = 0, \cdots, X_n = 0) &= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = 1) \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) \\
&= \prod_{i=1}^{k} p \prod_{i=k+1}^{n} (1-p) = p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que peu importe le choix des k variables parmi $X_1, \cdots, X_n$, on retombe sur la même valeur $p^k(1-p)^{n-k}$. De plus, les événements obtenus par deux choix différents sont incompatibles. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \underbrace{\mathbb{P}(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\text{un choix possible de } k \text{ v.a. mises à 1, les autres à 0}} + \underbrace{\mathbb{P}(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\text{un autre choix}} + \cdots \\
&= p^k(1-p)^{n-k} + p^k(1-p)^{n-k} + \cdots
\end{aligned}$$

Enfin, il y a autant de choix possibles que de façons de choisir k v.a. parmi n. On somme donc $\binom{n}{k}$ termes :

$$\mathbb{P}(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

□

Exemple 14. Si on lance n fois une pièce (équilibrée), et qu'on compte le nombre de piles obtenus, alors la v.a. correspondante suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

4 Couples de v.a.

4.1 Définition, loi conjointe

Définition 35.22

Soit $X:\Omega\to E$ et $Y:\Omega\to F$ deux v.a. Alors on définit l'application notée (X,Y) définie par :

$$\begin{aligned}(X,Y):\Omega&\to E\times F\\ \omega&\mapsto (X(\omega),Y(\omega))\end{aligned}$$

L'application (X,Y) est appelée un couple de v.a.

Définition 35.23 (Loi conjointe)

Soit $X:\Omega\to E$ et $Y:\Omega\to F$ deux v.a. La loi conjointe du couple (X,Y) est la loi du couple (X,Y). C'est donc l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X,Y)}:\mathcal{P}(E\times F)&\to[0,1]\\ S&\mapsto\mathbb{P}(\ (X,Y)\in S\ )\end{aligned}$$

Notation. On a donc $S\subset E\times F$ dans la définition ci-dessus. En général, on considère des parties S de la forme $S=A\times B$ avec $A\subset E$ et $B\subset F$. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}(\ (X,Y)\in(A\times B)\ )=\mathbb{P}(X\in A,\ Y\in B)$$

Propriété 35.24

La loi conjointe de (X,Y) est entièrement déterminée par la distribution de probabilités

$$(\mathbb{P}(X=x,\ Y=y))_{x\in E,\,y\in F}$$

Démonstration. Si on connait la famille

$$(\mathbb{P}(X=x,\ Y=y))_{x\in E,\,y\in F}$$

alors on peut en déduire la famille

$$(\mathbb{P}(X\in A,\ Y\in B))_{A\in\mathcal{P}(E),\,B\in\mathcal{P}(F)}$$

La méthode est similaire à la démonstration de la propriété 35.14. Enfin, sur le même principe, on peut en déduire la famille :

$$(\mathbb{P}((X,Y)\in S))_{S\in\mathcal{P}(E\times F)}$$

qui est exactement la loi conjointe. □

Exemple 15. On lance deux dés à 4 faces et on note X_1, X_2 les v.a. correspondant aux résultats de chaque lancer. Enfin, on note

$$U=\min(X_1,X_2) \qquad V=\max(X_1,X_2)$$

Déterminer la loi conjointe de (U,V).

On peut synthétiser les résultats sous la forme d'un tableau :

$\mathbb{P}(U=\dots,V=\dots)$	$V=1$	$V=2$	$V=3$	$V=4$
$U=1$				
$U=2$				
$U=3$				
$U=4$				

4.2 Lois marginales

Définition 35.25

Pour tout couple (X,Y) de v.a., la loi de X et la loi de Y sont appelées des lois marginales du couple (X,Y).

Ainsi pour un couple (X,Y), on dispose de 3 lois :

1. La loi conjointe $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ déterminée par les valeurs de $\mathbb{P}(X=x,\ Y=y)$.
2. La loi marginale $\mathbb{P}_X$ déterminée par les valeurs de $\mathbb{P}(X=x)$.
3. La loi marginale $\mathbb{P}_Y$ déterminée par les valeurs de $\mathbb{P}(Y=y)$.

À partir de la loi conjointe, on peut déterminer les lois marginales :

Propriété 35.26

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. Alors

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in F} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Exemple 16. Déterminons les lois marginales de l'exemple précédent. Pour cela on reprend le tableau précédent : il suffit de faire la somme sur chaque ligne et chaque colonne pour avoir les lois marginales.

$\mathbb{P}(U = \dots, V = \dots)$	$V = 1$	$V = 2$	$V = 3$	$V = 4$	$\mathbb{P}(U = \dots)$
$U = 1$	$\frac{1}{16}$	0	0	0	
$U = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	0	
$U = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	
$U = 4$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
$\mathbb{P}(V = \dots)$					Total : 1

Remarque. Comme on l'a dit, la connaissance de la loi conjointe suffit à déterminer les lois marginales. La réciproque est fausse : par exemple ci-dessus, si on ne connait que les lois marginales, on a accès à la somme de chaque ligne et chaque colonne, i.e. 8 informations. Cela ne suffit pas à "reconstruire" les 16 valeurs du tableau qui correspondent à la loi conjointe !

4.3 Couple de deux v.a. indépendantes

Lorsque deux v.a. $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont **indépendantes**, alors exceptionnellement les lois marginales permettent de déduire la loi conjointe. En effet, on a pour tous $x \in E$ et $y \in F$:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Dans ce cas :

- si on connait la loi marginale de X, i.e. les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in E$,
- si on connait la loi marginale de Y, i.e. les $\mathbb{P}(Y = y)$ pour $y \in F$
- alors on connait la loi conjointe de (X, Y), i.e. les $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $x \in E$ et $y \in F$.